O PROBLEMĂ INSPIRATĂ DIN NATURĂ, CARE A STAT LA BAZA STABILIRII ŞIRULUI LUI FIBONACCI

Stelian IONESCU[*]

Şirul lui Fibonacci este un şir de numere izvorât din “celebra problemă a iepurilor de casă”, în jurul căruia s-a dezvoltat o întreagă teorie şi care rămâne unul din cele mai atractive capitole ale matematicii elementare.

Lucrarea “Liber abacci”, scrisă de renumitul matematician Leonardo din Pisa (sec. XIII), cunoscut prin porecla Fibonacci (fiul lui Bonacci) şi care cuprinde aproape toate cunoştinţele de aritmetică şi algebră din acea perioadă a evului mediu, este ilustrată printr-un mare număr de probleme, între care şi cea analizată mai jos.

O pereche	1
Prima	2
A doua	3
A treia	5
A patra	8
A cincea	13
A şasea	21
A şaptea	34
A opta	55
A noua	89
A zecea	144
A unsprezecea	233
A douăsprezecea	377

1. În problemă se cere să se afle: “*Câte perechi de iepuri se nasc într-un an dintr-o singură pereche de iepuri ?”*

Pentru a afla câte perechi de iepuri se nasc într-un an, cineva a aşezat o pereche de iepuri într-un loc îngrădit cu un zid, ştiind că, după o lună, o pereche de iepuri aduce pe lume o altă pereche, iar iepurii încep să dea naştere la pui la vârsta de o lună. Deoarece prima pereche dă în prima lună descendenţi, perechea se dublează şi în această lună se obţin 2 perechi; dintre acestea, prima pereche va avea descendenţi şi în luna următoare, astfel încât în luna a doua vor fi 3 perechi. Dintre acestea, în luna următoare 2 perechi vor avea descendenţi, astfel încât în luna a treia se mai nasc 2 perechi de iepuri şi numărul de perechi în această lună va fi de 5. Dintre acestea, în aceeaşi lună, vor avea urmaşi 3 perechi, iar numărul de perechi de iepuri în luna a patra va fi de 8, din care 5 perechi vor da naştere la alte 5 perechi care, adunate cu cele 8 perechi, constituie 13 perechi în luna a cincea. Din cele 13 perechi, 5 perechi născute în această lună nu vor avea descendenţi, restul de 8 perechi vor avea. Descendenţii, în acest fel, în luna a şasea vor fi 21 de perechi.Aceastea din urmă, plus 13 perechi care se vor naşte în luna a şaptea, fac 34 de perechi. Adunate cu 21 de perechi care se vor naşte în luna a opta, fac 55 de perechi. Însumate cu 34 de perechi născute în luna a noua, fac 89 de perechi. Dacă adăugăm la acestea 55 perechi ce se vor naşte în luna a zecea, vom ajunge la 144 de perechi. În luna a unsprezecea se vor naşte 89 de perechi, aşa încât se vor obţine 233 de perechi. În sfârşit, în ultima lună se vor naşte 144 de perechi, rezultând 377 de perechi. Acesta este numărul de perechi produs de o singură pereche de iepuri, într-un loc îngrădit, la sfârşitul unui an.

În adevăr, se poate urmări în schemă cum putem efectua calculele: adunăm primul număr cu al doilea (1+2), al doilea cu al treilea ş.a.m.d., până ajungem să adunăm al zecelea număr cu al unsprezecelea, adică 144 cu 233. Obţinem, aşadar, numărul total de iepuri menţionaţi, adică 377. Astfel putem face calculul pentru un număr nesfârşit de luni.

2. Trecem de la iepuri la numere şi considerăm următorul şir numeric:

$$u_1, u_2, \ldots u_n \qquad (1)$$

unde fiecare termen este egal cu suma celor 2 termeni precedenţi, pentru orice n>2, avem:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (2)$$

Astfel de şiruri, în care fiecare termen este determinat ca o anumită funcţie de termeni precedenţi, sunt adesea întâlnite în matematică şi se numesc *şiruri recurente*.

[*] Şcoala nr. 19, Piteşti

3. Vom considera cazul particular al şirului (1), când $u_1=1$ şi $u_2=1$. Relaţia (2), după cum am menţionat, ne dă posibilitatea să calculăm, succesiv, toţi temenii acestui şir. Este uşor de verificat că, în acest caz, primii 13 termeni ai săi vor fi numerele: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 pe care le-am întâlnit în problema cu iepurii.

În cinstea autorului acestei probleme, întregul şir (1) pentru cazul $u_1=u_2=1$, poartă numele de **şirul lui Fibonacci**, iar termenii lui, **numerele lui Fibonacci**, care, la rândul lor, se bucură de o serie întreagă de proprietăţi.

4. Căutându-se soluţiile relaţiei (2) se constată că acestea sunt două progresii geometrice, a căror raţii sunt valorile $(1\pm\sqrt{5})/2$.

Valoarea pozitivă $(1\pm\sqrt{5})/2 = 1,618\ldots$ este o constantă, care la scară universală constituie acel esenţial adevăr conţinut în orice lucru, acea măsură interioară care apropie de sensul real al lucrurilor şi care se numeşte **numărul de aur**. Acesta este deci un concept în domeniul aprecierii estetice privind *proporţia intrinsecă* (care tinde la esenţa lucrurilor) a unui obiect şi se află la limita dintre geometria şi *frumosul* acestuia.

Ca un criteriu al maiestăţii şi frumuseţii ideale, numărul de aur a jucat un rol important în artă, în realizarea capodoperelor lumii, poate fi întâlnit la om, dar abundă în lumea vegetală şi animală, regăsindu-se între formele şi măsura părţilor lor, pe de o parte, şi aprecierea vizual-estetică, pe de altă parte.

Nu la întâmplare apar mugurii pe o creangă, nici ramurile pe tulpina unui copac. Chiar între mărimea trunchiului unui copac şi a coroanei şi înălţimii întregului copac se verifică satisfacerea secţiunii (numărului) de aur. De amintit, în acest sens, ar fi marele copac *Sequoia* – Big Tree – capodoperă a naturii.

Întâlnit la piramida Keops, simbol al armoniei universale, în artă şi arhitectură, la om şi în natură, numărul de aur mai este denumit - în mod mistic – şi *proporţie divină*, ce derivă din acele raţiuni interne ale lucrurilor create ce ne vorbesc clar despre o *inteligenţă superioară*.